**הרחבה בנושא פתרון יחסי נסיגה לינאריים**

השיטה לפתרון יחסי נסיגה לינאריים-הומוגניים מוצגת בספר כ"מתכון" ללא הוכחה. הסיבה לכך היא שההוכחה דורשת ידע בסיסי באלגברה לינארית, חומר שאינו נדרש כתנאי מקדים בקורס שלנו.  לא אתן כאן את כל ההוכחה אבל למען המתעניינים אתאר מסגרת להוכחה.

**ההסבר מניח ידע בסיסי באלגברה לינארית**.   
אני חושב שמי שאהב לינארית יאהב את התיאור הבא.

אם תלמדו בהמשך את הקורס במשוואות דיפרנציאליות, תיתקלו שם בתהליך מקביל לגמרי בפתרון משוואות דיפרנציאליות לינאריות. שם זה יוכח במלואו.  

ובכן,   
בהנתן יחס נסיגה לינארי-הומוגני, **בלי**תנאי התחלה, נחשוב על כל הסדרות האינסופיות המקיימות אותו.

**תרגיל קל:** הוכח שאם שתי סדרות מקיימות את יחס הנסיגה, גם הסכום שלהן מקיים אותו (חיבור סדרות מתבצע איבר-איבר), והוכח שאם סדרה מקיימת את יחס הנסיגה, גם הסדרה המתקבלת מכפל כל אברי הסדרה בקבוע מקיימת אותו.  
  
זה שיחס הנסיגה עצמו הוא לינארי והומוגני חיוני לנכונות שתי הטענות, זה לא נכון ליחס נסיגה כלשהו.

אוסף כל הסדרות המקיימות את היחס הוא אפוא מרחב לינארי. נקרא לו W.

W הוא תת-מרחב של מרחב אינסוף-ממדי V, של כל הסדרות האינסופיות.

נחפש בסיס ל- W.   
מדוע? אם נמצא בסיס, נוכל לרשום אבר כללי ב- W כצירוף לינארי של אברי הבסיס שמצאנו.   
אם הסדרה שאנו מעוניינים בה מקיימת תנאי התחלה מסוימים, תנאים אלה יהפכו לתנאים על המקדמים בצירוף הלינארי, ונקווה שתנאים אלה יגדירו לגמרי את המקדמים. אם זה יקרה משמע מצאנו את הפתרון של יחס הנסיגה: הצגנו את הפתרון כצירוף לינארי של סדרות ידועות - אברי הבסיס שבחרנו.

דרך מקובלת למצוא בסיס למרחב, בהקשר של בעיה מסוימת, היא לחפש וקטורים עצמיים לטרנספורמציה מעניינת באותו מרחב, שיש לה קשר לבעיה...

נסתכל בפעולה הבאה על V :  
זורקים את האבר הראשון בסדרה, ומקבלים כך סדרה חדשה.   
בסדרות אינסופיות "אורך" הסדרה לא השתנה... כך שזו פונקציה מ- V ל- V.

פעולה דומה מוכרת בתכנות כפעולה shift על מערך סופי, בהבדל קטן: בתכנות, shift מחזירה את האבר שזרקנו, בעוד שהפעולה שלנו מחזירה את הסדרה שהתקבלה לאחר השמטת האבר.   
בכל זאת נקרא לפעולה שלנו shift . שתי אבחנות קלות על פעולה זו:

\* אם סדרה מקיימת את יחס הנסיגה, גם הסדרה המקוצצת מקיימת אותו.  
במלים אחרות, אפשר לראות את הפעולה shift כפונקציה מ- W ל- W .  
  
\* הפעולה shift היא טרנספורמציה **לינארית**של W.

עוד אבחנה מעניינת:

להגיד שסדרה היא **וקטור עצמי**של הטרנספורמציה shift,  עם ערך עצמי λ ,

זה בדיוק לומר שהסדרה היא **סדרה גיאומטרית**עם מנה λ .  
חישבו והבינו מדוע!

פתרון יחסי נסיגה לינאריים הוא בעצם לכסון הטרנספורציה shift במרחב W,   
כלומר מציאת בסיס ל- W שמורכב מוקטורים עצמיים של  shift (משמע סדרות הנדסיות).  
אם לא ניתן ללכסן אז מוצאים "צורת ז'ורדן".

אחרי מציאת הבסיס, אנו מביעים בעזרתו את הסדרה המקיימת את תנאי ההתחלה המסוימים בהם אנו מעוניינים.

זו המסגרת המחשבתית של הנושא, או לפחות כך אני אוהב לחשוב עליו... בספרי לימוד זה לא תמיד מוצג בדיוק בצורה כזו.

להסבר מלא יותר חפשו  
  [Linear homogeneous recurrence relations with constant coefficients](https://www.google.co.il/search?q=linear+homogeneous+recurrence+relations+with+constant+coefficients) .

שינוי אחרון: 5/09/2018, 10:14